Chapitre n° 6 : Fonctions exponentielle et logarithme népérien

2021-2022

1 Fonction exponentielle (rappels de Première et de Terminale

1.1 Définition et premières propriétés

Théorème 1

♥ Il existe une unique fonction exp, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Cette fonction est la *fonction exponentielle*. Plus tard, on notera $\exp(x) = e^x$.

Remarque 1. L'existence de la fonction exp est admise. On ne démontre que son unicité.

Lemme 2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ donc $\exp(x) \neq 0$.

Preuve. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x)\exp(-x)$.

La fonction $v : x \mapsto \exp(-x)$ est la composée de la fonction affine (dérivable sur $\mathbb{R}$) $x \mapsto -x$ suivie de la fonction exp, également dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction v est donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par $v'(x) = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Comme produit de exp et v dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = \exp'(x)v(x) + v'(x)\exp(x) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(-x)\exp(x) = 0$, donc h est constante égale à $h(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$. D'où $h(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ donc $\exp(x) \neq 0$.

Preuve. (de l'unicité dans le théorème 1) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$$

La fonction g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque exp ne s'annule pas (lemme 2).

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - \exp'(x)f(x)}{\exp(x)^2} = \frac{f(x)\exp(x) - \exp(x)f(x)}{\exp(x)^2} = 0$$

donc g est constante égale à $g(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = 1$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.
Ainsi, exp est la seule fonction à satisfaire $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

Définition 3

On définit le nombre e par $e = \exp(1) \approx 2{,}718$.

1.2 Propriétés algébriques

Théorème 4

♥ Pour tous x, y réels, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Preuve. on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

On remarque que $f(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = f(x)$. Par unicité : $f(x) = \exp(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

Remarque 2. Le livre propose une autre démonstration.

Propriété 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$

Preuve. montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\exp(nx) = \exp(x)^n$

⋆ initialisation : $\exp(0) = 1 = \exp(x)^0$: la propriété est vraie au rang 0.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie au rang n : $\exp(nx) = \exp(x)^n$. On a :

$\exp(x)^{n+1} = \exp(x)^n \exp(x) \overset{\text{réc.}}{=\!=} \exp(nx)\exp(x) \overset{\text{thm 4}}{=\!=} \exp((n+1)x)$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$

⋆ conclusion : la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

On l'étend à $n \in \mathbb{Z}$ en remarquant que

$1 = \exp(0) = \exp(nx + (-nx)) = \exp(nx)\exp(-nx)$ et donc $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{\exp(x)^n} = \exp(x)^{-n}$.

Remarque 3. On a donc $e^n = \exp(1)^n = \exp(n)$ pour tout entier n. Par analogie, on note $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x, notation cohérente du fait que la fonction exponentielle possède les mêmes propriétés algébriques (transformation de la somme en produit) que les exposants (d'où le nom de la fonction exponentielle).

Propriété 6

Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $e^0 = 1$ ② $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ③ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

④ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ⑤ $e^{nx} = (e^x)^n$ ⑥ $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$ ⑦ $e^x > 0$

Preuve. Le point ① vient de la définition. Le point ③ est le lemme 2, les points ② et ⑤ sont prouvées ci-dessus (théorème 4 et propriété 5).

Pour le point ④ on a : $\exp(x-y) \overset{②}{=\!=} \exp(x)\exp(-y) \overset{③}{=\!=} \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Pour les propriété ⑥ et ⑦, on remarque que $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \exp x$. Comme un carré est positif et $\exp(x) \neq 0$, $\exp(x) > 0$. Ainsi, $\exp(x/2)$ est positif, c'est donc la racine carrée de $\exp(x)$. □

Exemple 1. Simplifier $\dfrac{(e^3)^8}{e^2 \times e^{-6}}$

Pourquoi exp est-elle strictement croissante ?

Résoudre $e^{2-x} = 1$

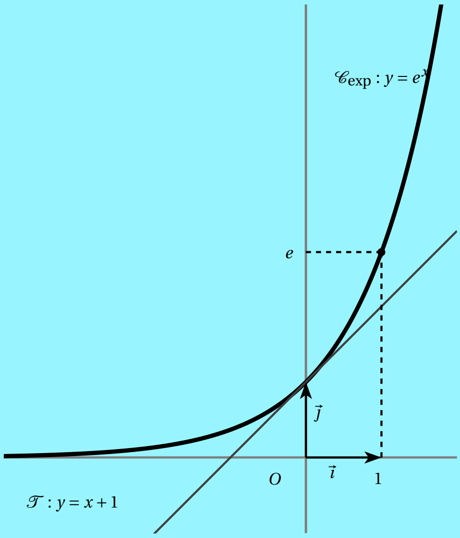
1.3 Étude de la fonction exponentielle

Théorème 7

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
exp			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

① $e^0 = 1$ ② ♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ③ ♥ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$



Remarque 4. La tangente $\mathscr{T}$ au point $(0;1)$ à la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$ donc $y = x+1$, $\mathscr{T}$ est sous $\mathscr{C}_{\exp}$ sauf au point de contact $(0;1)$.

Preuve. Par définition, la fonction exponentielle est dérivable de dérivée $\exp' = \exp$.

Or, d'après le point ⑦ de la propriété 6, on a $\exp(x) > 0$ pour tout x.

La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

① est vrai par définition.

② ♥ on va montrer : $\exp(x) \geq x+1$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis utiliser le théorème de comparaison.

Étudions la foncton f définie par $f(x) = \exp(x) - (x+1)$. Cette fonction est dérivable de dérivée $f'(x) = \exp(x) - 1 = \exp(x) - \exp(0)$ pour tout réel x. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $f'(x) > 0 \iff x > 0$ et $f'(x) < 0 \iff x < 0$ donc :

D'après le tableau de variations, le minimum de $f(x)$ est atteint en 0 et vaut 0. Ainsi, $\exp(x) \geq x+1$ pour $x \neq 0$. On a donc l'inégalité annoncée (et la position relative de la remarque 4).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, donc par le théorème de minoration : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

③ ♥ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \overset{X=-x}{=\!=} \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} \overset{\text{pp.6,③}}{=\!=} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X} \overset{\text{th.7,②}}{=\!=} 0.$ □

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$. Tableau de variations complet ?

Remarque 5. Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

Exemple 3. Résoudre $e^{3x} - e^{2x+1} > 0$

Résoudre $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

1.4 Croissance comparée et limite remarquable

Théorème 8

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty\ (n \in \mathbb{N})$ (croissance comparée)

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ④ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0\ (n \in \mathbb{N})$ (croissance comparée)

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 0)

Preuve. ① pour $x > 0$: $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}}{2\times\frac{x}{2}} = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \times \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \geq \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$. L'inégalité vient de la remarque 4 sur la position relative courbe tangente : $e^x \geq x+1 > x$ donc pour $X > 0$, $\frac{e^X}{X} > 1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty$.

Par théorème de comparaison, on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. ② se démontre avec la même idée.

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X} = 0$ (inverse de la limite précédente). Idem pour ④.

⑤ Comme $\exp'(0) = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{0+h} - e^0}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. □.

2 Fonction logarithme népérien

2.1 Définition et propriétés algébriques

Définition 9

La fonction logarithme néperien[1], notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle sur $]0;+\infty[$. Le logarithme néperien est donc définie sur $]0;+\infty[$ et vérifie : $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.

Remarque 6. Soit $y > 0$ quelconque.
La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $y \in]\lim\limits_{x\to-\infty} e^x ; \lim\limits_{x\to+\infty} e^x[$.
Ainsi, par théorème de la bijection, il existe un unique réel noté $x = \ln(y)$ tel que $e^x = y$.

Théorème 10

♥ Pour tous réels $x, y > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $e^{\ln(x)} = x$ ② $\ln(e^a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

③ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ ④ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

⑤ $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$ ⑥ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

⑦ $\ln(x^n) = n\ln(x)$ ⑧ $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

⑨ ⚠ : ln est définie sur $]0;+\infty[$: $\ln(0)$, $\ln(-2)$ n'existent pas !

1. John Neper, (1550-1617) est un mathématicien écossais à l'origine des logarithmes, en 1614. Il a introduit ce concept afin de simplifier des calculs fastidieux appliqués à l'astronomie.

Preuve. Plusieurs résultats reposent sur : $e^a = e^b \iff a = b\ (*)$.

Exemple 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $e^x - 2 = 0 \iff$

Exemple 5. $\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln(3e^2) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) =$

Remarque 7. si $a, b > 0$, $\ln(a) < \ln(b) \iff e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \iff a < b$ (car exp strictement croissante).
Donc ln est strictement croissante. On a donc également : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.

Exemple 6. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}99^n < 0{,}5 \iff$

2.2 Étude de la fonction logarithme

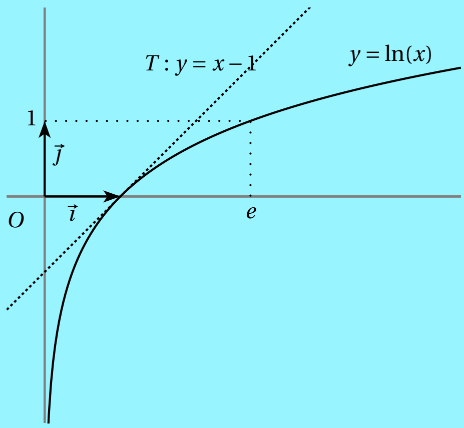
Théorème 11

ln est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ pour tout } x > 0$$

De plus : $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
ln	$-\infty$ ↗	$+\infty$



Remarque 8. Comme ln est strictement croissante, pour $a, b > 0$: $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.

Remarque 9. Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors par théorème de dérivation des fonctions composées, $\ln(u)$ existe et est dérivable sur I, de dérivée

Remarque 10. $\ln'(1) = 1$ et $\ln(1) = 0$ donc $y = x - 1$ est l'équation de la tangente à la courbe de ln en $x = 1$. Ainsi :
$\ln(x) \approx x - 1$ pour x voisin de 1, ou encore :
$\ln(1 + h) \approx h$ pour h voisin de 0.

Preuve. On admet la dérivabilité (et donc la continuité) de ln sur $]0; +\infty[$.

♥ On considère f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$ (dérivable par composition) de dérivée vérifiant d'une part $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = x\ln'(x)$ et d'autre part $f'(x) = 1$ car $f(x) = x$. Ainsi, pour $x > 0$, $x\ln'(x) = 1$ d'où $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. □

Exemple 7. Tableau de signe de $\ln(x)$?

Dériver $g : x \mapsto \ln(x + x^2)$

Théorème 12

♥ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

① $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^n}{x} = 0$ (croissances comparées)

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x)^n = 0$ (croissances comparées)

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 1)

Preuve. ① $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{x=e^X}{=\!=} \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(e^X)}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée de la fonction exponentielle.
La même idée permet d'obtenir ② ③ et ④.

⑤ : on exprime la dérivabilité en 1 : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

Définition 13

Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln(a)}$ (exponentielle de base a).
Le logarithme de base a est $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ pour $x > 0$. On note $\log = \log_{10}$.

Exemple 8. Étudier $h :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$.